2次元 Darcy-Brinkman 方程式の解析解の導出
Derivation of analytical solutions of two-dimensional Darcy-Brinkman equation

○門脇悠真，藤澤和謙，村上　章
Yuma KADOWAKI, Kazunori FUJISAWA, Akira MURAKAMI

1. はじめに

ため池やフィルダムといった農業水利施設は，粘土・砂・礫などの土質材料から構成され，その内部には図 1 のように飽和領域・不飽和領域・流体領域の三相が存在する．流体領域は空洞やパイピングが発生した領域を意味し，それらは施設の機能低下や安定性を損なう原因となる．施設内の流体の挙動を正確に予測することは，施設の長期的なマネジメントに不可欠であることから，著者らは，異なる三相に及ぶ流れを連続的に把握するため，飽和領域のみを対象とする従来の Darcy-Brinkman 式を不飽和領域にまで拡張した[1)]．しかし，不飽和領域における Darcy-Brinkman 式の理論解は求められておらず，同方程式の数値計算の精度を検証することが困難な現状がある．そこで本論では，不飽和領域に拡張された Darcy-Brinkman 式に関して，二次元問題における解析解を導出し，数値検証に利用することを見据える．

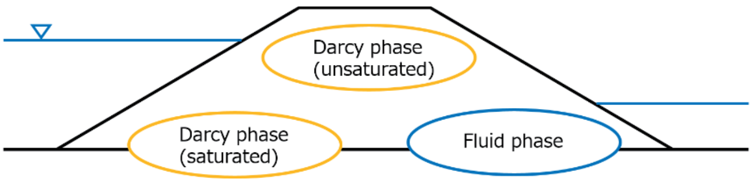

図 1　提体における三相領域（飽和・不飽和・流体領域）
Fig.1 Saturated, unsaturated and fluid phases in an embankment

2. 支配方程式

不飽和領域において，空間的な平均操作を施すことにより，以下の不飽和領域に拡張された Darcy-Brinkman 式が得られる．

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}+\frac{\partial \theta}{\partial t}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{u_i u_j}{\theta}\right)+\frac{\theta}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}-\nu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\frac{\theta g}{k}u_i=0 \tag{2}$$

ここに，$u_{i,}$ k, p, g, ρ, θ はそれぞれ，Darcy 流速，透水係数，圧力，重力加速度，密度，体積含水率である．式(2)は，$\theta=1, k=\infty$のとき，Navier-Stokes 式に一致し，浸透流とパイピング流れの同時解析に有利となる．

3. Darcy-Brinkman 式の線形化

不飽和領域では，流速が小さいため式(2)第 2 項の移流項の影響が小さくなる．また，同式第 4 項の粘性項は第 5 項の Darcy 項と比較して非常に小さいため，移流項及び粘性項を無視した Darcy-Brinkman 式を考える．これらの項を無視しても，kやθは，van Genuchten モデルのように，水圧 p(または圧力水頭 h)の非線形関数となる．そのため，式(1)と式(2)は流速 u_iと圧力 $p(=\rho gh)$に関して非線形な偏微分方程式となり，解析解を求めることは容易ではない．

所属：京都大学 Kyoto University　　Keywords : 応用力学, 水利構造物, 浸透流解析

Tracy(2006) [2)]は水分特性曲線の関数形を工夫することで Richards 式の線形化が可能になることを示しており，ここでも同様の方法で式(1)と式(2)の線形化を行う．具体的には，θとk に以下の指数モデルを適用する．

$$\theta = \theta_r + (\theta_s - \theta_r)e^{\alpha h}\ ,\quad k = k_s \cdot e^{\alpha h} \tag{3}$$

ここで，

$$\bar{h} = e^{\alpha h} - e^{\alpha h_r}\ ,\quad C_1 = \frac{g}{\alpha}\ ,\quad C_2 = \frac{\theta_s g}{k_s} \tag{4}$$

とおくと，式(1)と式(2)は以下のように変形できる．

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \theta_s \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \theta_s C_1 \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + C_2 u = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \theta_s C_1 \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} + C_2 u = 0 \tag{7}$$

ここに，θ_r は残留体積含水率，α は水分特性曲線の形状を表す定数，h_r は最小圧力水頭，θ_s は飽和体積含水率，k_s は飽和透水係数である．

4. 消散型波動方程式への帰着

式(5)を時間 t で微分し，式(6)と式(7)に代入することで，$\bar{h}$ が消去され，u に関する以下の式(8)を得る．

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + C_2 \frac{\partial u}{\partial t} = C_1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{8}$$

これは，消散型波動方程式（Damped wave equation）と呼ばれる偏微分方程式であり，初期条件と境界条件を適切に設定することにより解析解が求められる．今，$0 < x < L$, $0 < y < L$を解析領域とし，以下の境界条件を与える．

$$u(L, L, t) = 0\ ,\quad \partial u(0,0,t)/\partial x = 0\ ,\quad \partial u(0,0,t)/\partial y = 0 \tag{9}$$

このとき，以下の一般解を得る．

$$u = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \sin\omega_1 x \cdot \sin\omega_2 y \cdot \left(D_1 e^{p_1 t} + D_2 e^{p_2 t}\right) \tag{10}$$

$$\omega_1 = \frac{k\pi}{L}\ ,\ \omega_2 = \frac{j\pi}{L}\ \ (k, j = 1,2,3,\cdots)\ ,\ p_1, p_2 = \frac{1}{2}\left(-C_2 \pm \sqrt{C_2^2 + 4\lambda}\right),\ \omega_1^2 + \omega_2^2 = -\frac{\lambda}{C_1} \tag{11}$$

また，同様に式(5)～(7)からu を消去し，$\bar{h}$ に関する方程式を導き，以下の境界条件を与えて解くと，式(10)と同様に式(13)の結果を得る．また，圧力水頭 h は式(14)より得られる．

$$\bar{h}(0,0,t) = 0\ ,\quad \partial \bar{h}(L, L, t)/\partial x = 0\ ,\quad \partial \bar{h}(L, L, t)/\partial y = 0 \tag{12}$$

$$\bar{h} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \cos\omega_1 x \cdot \cos\omega_2 y \cdot \left(D_3 e^{p_1 t} + D_4 e^{p_2 t}\right) \tag{13}$$

$$h = \frac{1}{\alpha}\log\left(\bar{h} + e^{\alpha h_r}\right) \tag{14}$$

ここに，D_1，D_2，D_3，D_4 は初期条件によって定まる積分定数である．

5. まとめ

本論では，不飽和領域に拡張された Darcy-Brinkman 式に関して，水分特性曲線の関数形を工夫することで，線形な消散型波動方程式に帰着でき，解析解の導出が可能であることを示した．今後は，この解析解を利用し，数値計算の精度検証を実施する予定である．

参考文献：1) 藤澤和謙，村上　章 (2019)：Darcy-Brinkman 式の不飽和領域への拡張，農業農村工学会論文集，No.308, pp.27-36.　2) Tracy，F.T. (2006)：Clean two- and three-dimensional analytical solutions of Richards' equation for testing numerical solves, Water Resour. Res., Vol,42. W08503.